

BÖLÜM 13: TEK YÖNLÜ VARYANS ANALİZİ

13.1. Giriş

Araştırmalarda, genel olarak, değişkenler birbirlerini etkileme ve açıklama bakımından bağımlı değişken ve bağımsız değişken(ler) olmak üzere iki gruba ayrılır. Bağımlı değişken bağımsız değişken(ler) tarafından açıklanmaya çalışılan değişkendir. Varyans analizinin amacı bağımlı değişkendeki varyansın (değişimin) kaynağını araştırmaktır. Öğrencilerin sosyal etkinliklere ayırdıkları süreler niçin farklıdır? Eğer tüm öğrenciler sosyal etkinliklere aynı süre ayırmış olsalardı ortada bir problem de olmazdı. Fakat, gerçek hayatta, öğrencilerin sosyal etkinliklere ayırdıkları süreler aynı değildir. Bu nedenle “sosyal etkinliklere ayrılan süre” değişkenine ilişkin bir varyans olduğu açıktır. Bu varyansın nedeni (kaynağı) nedir? Araştırmalarda bu sorunun yanıtı aranır. Bu değişkendeki değişimin (varyansın) kaynağı annenin eğitim düzeyi, cinsiyet, oturulan semt,... olabilir. Buradaki “sosyal etkinliklere ayrılan süre” *bağımlı değişkendir*. *Bağımsız değişkenler* ise annenin eğitim düzeyi, cinsiyet, oturulan semt,... olabilir. Bu konuyla ilgili ikinci örneği tarımdan verelim. Dekar başına alınan verim (kg) bağımlı değişken olarak alındığında bağımsız değişkenler toprak çeşidi ya da kullanılan kimyevi gübre türü olabilir. Dekar başına alınan verim her dekada aynı değilse bunun kaynağı hangi bağımsız değişkendir? Bir örnekte tıptan verelim. Ameliyat edilen hastaların iyileşme süreleri niçin farklıdır? İyileşme sürelerinin farklı olmasının nedeni ameliyatı yapan doktorlar mıdır? Bu örnekte de bağımlı değişken iyileşme süresi bağımsız değişken de doktorların mesleki tecrübe durumu olabilir. Verilen üç örnekte de bağımlı değişkenler, sosyal etkinliklere ayrılan süre, verim, iyileşme süresi, oranlama düzeyinde ölçülen değişkenlerdir. Bağımsız değişkenler için verilen örneklerde sınıflama ve sıralama düzeyinde ölçülebilen değişkenler olduğu görülmektedir. Oturulan semt, toprak çeşidi ve kimyevi gübre türü sınıflama düzeyinde ölçülen değişkenlerdir. Annenin eğitim durumu ve doktorun tecrübe durumu da sıralama ölçme düzeyinde ölçülen değişkenlerdir. Varyans analizinde bağımlı değişken eşit aralıklı ya da oranlama, bağımsız değişken(ler) de sınıflama ya da sıralama düzeyinde ölçülür. Hem bağımlı hem de bağımsız değişken(ler)in, eşit aralıklı ya da oranlama düzeyinde ölçüldüğü regresyon konusu on ikinci ve on üçüncü bölümde ele alınmıştır.

Varyans analizinde bağımsız değişkene *faktör* ve bağımsız değişkenin aldığı değerlere de *faktör düzeyleri* denir. Oturulan semt faktör olarak alınırsa Çankaya, Altındağ, Yenimahalle, vb. de faktörün düzeyleri olacaktır. Teorik olarak bağımlı

değişkeni etkileyebilecek çok sayıda faktör düşünülebilir. Ancak bunların içinde 1–2 tanesi, bazen 3 tanesi, varyansın büyük kısmını açıklar. Tek faktörlü varyans analizinde bir faktörün bağımlı değişken üzerinde etkili olup olmadığı ortaya çıkartılmaya çalışılır. İki faktörün bağımlı değişken üzerinde etkili olup olmadığının araştırılmasına on birinci bölümde yer verilmiştir.

13.2. Kareler Toplamları

Varyans analizi adını test işlemini dayandırdığı bağımlı değişkenin varyansından alır. Çünkü varyans analizi bağımlı değişkene ait varyansa ilişkin kareler toplamalarının parçalanmasına dayanmaktadır. Bu kavramı tarım örneği ile birlikte ele alalım.

Bağımlı değişken dekar başına verim (kg) ve bağımsız değişken (faktör) de kullanılan gübre türü olsun. Gübre türü faktörünün de dört düzeyi Nitrat, Potasyum, Fosfat ve Amonyum olsun. Eğer kullanılan gübre türü verim üzerinde etkili değilse, faktörün her düzeyinde (her bir gübre türü için) elde edilen ortalama verim miktarlarının aynı (eşit) olması beklenir. Öte yandan, gübre türü verim üzerinde önemli bir etkiye sahipse, kullanılan bazı gübre türlerindeki verimin diğerlerinden farklı olması beklenmelidir. Bu farklılıkları ölçüsünü ortaya koyabilmek amacıyla diğer tüm şartların aynı olduğu (aynı coğrafi bölge, toprak türü, sulama miktarı, iş makinesi, çiftçi deneyimi vb.) 24 parsel belirlenmiş olsun. Bu 24 parselden rastgele 6’şar parselden dört grup oluşturulsun ve her bir gruba bir gübre türü dökülmüş olsun. Bu parsellerden elde edilen verim miktarlarının da aşağıdaki tablodaki gibi olduğunu düşünelim.

Gübre Türü			
Nitrat (X_1)	Potasyum (X_2)	Fosfat (X_3)	Amonyum (X_4)
20	13	5	11
17	15	4	11
14	14	13	9
19	12	18	8
16	12	10	7
16	6	10	8
102	72	60	54

Görüldüğü üzere en fazla toplam verim nitrat olan parsellerden, en az verim ise amonyum olan parsellerden elde edilmiştir. Bu durum sezgisel olarak gübre türünün verim üzerinde etkisi olduğuna işaret etse de, bu durumu istatistiksel olarak delillendirmek için öncelikle aşağıdaki kavramları tanımlayalım.

X_{ij} : Faktörün j . düzeyindeki i . örnek birimine ilişkin bağımlı değişken değeri ,

$$j = 1, 2, \dots, J \text{ ve } i = 1, 2, \dots, n_j$$

J : Faktörün düzey sayısı

HİPOTEZ TESTLERİ DERS NOTLARI

n_j : Faktörün j . düzeyi için örnek hacmi

n : Toplam örnek hacmi, $n = \sum_{j=1}^J n_j$

$T_{.j}$: Faktörün j . düzeyine ilişkin toplam değer, $T_{.j} = \sum_{i=1}^{n_j} X_{ij}$

$\bar{X}_{.j}$: Faktörün j . düzeyine ilişkin ortalama, $\bar{X}_{.j} = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} X_{ij}}{n_j} = \frac{T_{.j}}{n_j}$

$T_{..}$: Genel toplam, $T_{..} = \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{n_j} X_{ij} = \sum_{j=1}^J T_{.j}$

$\bar{X}_{..}$: Genel ortalama, $\bar{X}_{..} = \frac{\sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{n_j} X_{ij}}{n} = \frac{\sum_{j=1}^J T_{.j}}{n} = \frac{T_{..}}{n}$

Şimdi bağımlı değişkene ait örnek varyansının pay kısmı da olan, Toplam Kareler Toplamını (TKT) aşağıdaki gibi hesaplayabiliriz.

$$TKT = \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_{..})^2 \quad (13.1)$$

Eşitlik 13.1’de verilen TKT formülü, esasında 24 değerin örnek varyansını hesaplarken kullanılacak varyans formülünün pay kısmıdır. Şimdi yukarıdaki veri seti için TKT değerini hesaplayalım. Eşitlik 13.1’e göre, TKT değerini hesaplayabilmek için öncelikle $\bar{X}_{..}$ değerine ihtiyaç vardır. Tablodan $T_{.1} = 102$, $T_{.2} = 72$, $T_{.3} = 60$, $T_{.4} = 54$ ve $n = 6 + 6 + 6 + 6 = 24$ olduğunu biliyoruz. O halde genel ortalama aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$\bar{X}_{..} = \frac{\sum_{j=1}^J T_{.j}}{n} = \frac{102 + 72 + 60 + 54}{24} = 12$$

Şimdi TKT değerinin hesaplanması için gerekli olan ortalamadan farkların karelerini aşağıdaki gibi hesaplayabiliriz.

Birim No	X1	X2	X3	X4	(X1-X _{..}) ²	(X2-X _{..}) ²	(X3-X _{..}) ²	(X4-X _{..}) ²	
1	20	13	5	11	64	1	49	1	
2	17	15	4	11	25	9	64	1	
3	14	14	13	9	4	4	1	9	
4	19	12	18	8	49	0	36	16	
5	16	12	10	7	16	0	4	25	
6	16	6	10	8	16	36	4	16	
T.j:	102	72	60	54	174	50	158	68	
X_{..}	12								

Böylece bağımlı değişkenin toplam kareler toplamı;

$$TKT = \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_{..})^2 = 174 + 50 + 158 + 68 = 450$$

olarak hesaplanır.

Varyans analizinin bağımlı değişkene ilişkin toplam kareler toplamının parçalanmasına dayandığını ifade etmiştik. Şimdi bu parçalanmanın nasıl yapıldığını ele alalım. Eşitlik 13.1’de parantez içerisine $\bar{X}_{.j}$ ekleyip çıkarırsak, TKT değeri ve eşitlik etkilenmez. O halde;

$$\begin{aligned} TKT &= \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_{..})^2 = \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_{..} + \bar{X}_{.j} - \bar{X}_{.j})^2 \\ &= \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{n_j} ((X_{ij} - \bar{X}_{.j}) + (\bar{X}_{.j} - \bar{X}_{..}))^2 \\ &= \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{n_j} [(X_{ij} - \bar{X}_{.j})^2 + 2(X_{ij} - \bar{X}_{.j})(\bar{X}_{.j} - \bar{X}_{..}) + (\bar{X}_{.j} - \bar{X}_{..})^2] \end{aligned}$$

Burada $\sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{n_j}$ parantez içerisine dağıtıldığında, ortadaki terim 0 olacaktır. Bu durumda TKT aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_{..})^2 = \sum_{j=1}^J n_j (\bar{X}_{.j} - \bar{X}_{..})^2 + \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_{.j})^2 \quad (13.2)$$

Böylece TKT iki parçaya ayrılmış olur. Eşitliğin sağındaki terimler sırasıyla Gruplar Arası Kareler Toplamı (GAKT) ve Gruplar için Kareler Toplamı (GIKT) olarak adlandırılırlar.

$$GAKT = \sum_{j=1}^J n_j (\bar{X}_{.j} - \bar{X}_{..})^2 \quad (13.3)$$

$$GIKT = \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_{.j})^2 \quad (13.4)$$

GAKT, bağımlı değişkendeki değişimin faktör tarafından açıklanan kısmını verir. Dolayısıyla faktörün etkili olabilmesi için GAKT değerinin de büyük olması gerekmektedir. GIKT ise bağımlı değişkendeki toplam değişimin (TKT) kullanılan faktör ile açıklanamayan kısmını ifade eder ve küçük olması istenir. Elbette her zaman $TKT = GAKT + GIKT$ eşitliği sağlanmaktadır ve bu değerlerin üçü de asla negatif olamaz.

Şimdi verim verisi için GAKT ve GIKT değerlerini hesaplayabiliriz.

GAKT için her bir faktör düzeyine ait örnek hacimleri ve örnek ortalamalarıyla, toplam örnek hacmi ve genel ortalamaya ihtiyacımız var. Bu değerler aşağıdaki gibi verilmiştir.

HİPOTEZ TESTLERİ DERS NOTLARI

$$n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 6, \quad n = 24$$

$$\bar{X}_{.1} = \frac{102}{6} = 17, \bar{X}_{.2} = \frac{72}{6} = 12, \bar{X}_{.3} = \frac{60}{6} = 10, \bar{X}_{.4} = \frac{54}{6} = 9, \quad \bar{X}_{..} = 12$$

O halde GAKT aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$GAKT = \sum_{j=1}^J n_j (\bar{X}_{.j} - \bar{X}_{..})^2 = 6(17 - 12)^2 + 6(12 - 12)^2 + 6(10 - 12)^2 + 6(9 - 12)^2 = 228$$

GIKT için ise her bir gruba ait bağımlı değişkenin gözlem değerleri ile grup ortalamaları arasındaki farkların kareleri toplamına ihtiyaç vardır. Bu değerler aşağıdaki gibi hesaplanır.

Birim No	X1	X2	X3	X4	(X1-X.1)^2	(X2-X.2)^2	(X3-X.3)^2	(X4-X.4)^2	
1	20	13	5	11	9	1	25	4	
2	17	15	4	11	0	9	36	4	
3	14	14	13	9	9	4	9	0	
4	19	12	18	8	4	0	64	1	
5	16	12	10	7	1	0	0	4	
6	16	6	10	8	1	36	0	1	
Toplam	102	72	60	54	24	50	134	14	
X.j	17	12	10	9					

O halde GIKT değeri aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$GIKT = \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_{.j})^2 = 24 + 50 + 134 + 14 = 222$$

O halde $TKT = GAKT + GIKT$ eşitliğinin sağlandığı aşağıdaki gibi görülebilir.

$$TKT = GAKT + GIKT$$

$$450 = 228 + 222$$

Bu özelliğe *kareler toplamlarının toplanabilir olma özelliği* denilmektedir.

Ortalamaların tam sayı olmadığı durumlarda yukarı verilen eşitlikler yerine, hesaplama formülü olarak adlandırılan aşağıdaki eşitliklerin kullanılması önerilmektedir. Elde edilen değerler değişmeyecektir.

$$TKT = \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{n_j} X_{ij}^2 - \frac{T_{..}^2}{n} \quad (13.5)$$

13: TEK YÖNLÜ VARYANS ANALİZİ

$$GAKT = \sum_{j=1}^J \frac{T_j^2}{n_j} - \frac{T_{..}^2}{n} \quad (13.6)$$

$$GIKT = TKT - GAKT = \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{n_j} X_{ij}^2 - \sum_{j=1}^J \frac{T_j^2}{n_j} \quad (13.7)$$

Örnek verisi için TKT, GAKT ve GIKT değerlerini Eşitlik 13.5-13.7 ile hesaplayalım ve sonuçların değişmediğini görelim.

Birim No	X1	X2	X3	X4	X1^2	X2^2	X1^3	X2^3	
1	20	13	5	11	400	169	25	121	
2	17	15	4	11	289	225	16	121	
3	14	14	13	9	196	196	169	81	
4	19	12	18	8	361	144	324	64	
5	16	12	10	7	256	144	100	49	
6	16	6	10	8	256	36	100	64	
T.j	102	72	60	54	1758	914	734	500	
X.j	17	12	10	9					
T..=	288								

$$TKT = \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{n_j} X_{ij}^2 - \frac{T_{..}^2}{n} = 1758 + 914 + 734 + 500 - \frac{288^2}{24} = 450$$

$$GAKT = \sum_{j=1}^J \frac{T_j^2}{n_j} - \frac{T_{..}^2}{n} = \frac{102^2}{6} + \frac{72^2}{6} + \frac{60^2}{6} + \frac{54^2}{6} - \frac{288^2}{24} = 228$$

$$GIKT = TKT - GAKT = 450 - 228 = 222$$

13.3. Sabit Etki Modeli

Varyans analizinde faktör düzeylerinin nasıl seçileceği önemli bir konudur. Faktörün çok sayıdaki düzeyleri içinden ilgilenilen J tanesi keyfi olarak seçilirse kullanılan modele sabit etki modeli denir. Sabit etki modeli kullanıldığında, test işleminden elde edilen sonuç, sadece seçilen düzeyler için genellenebilir. Diğer bir ifadeyle elde edilen sonuç faktörün tüm düzeyleri için genellenemez. Sabit etki modeli aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$X_{ij} = \mu + \alpha_j + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n_j, j = 1, 2, \dots, J \quad (13.8)$$

Burada;

X_{ij} : Bağımlı değişkenin j. düzeydeki i. değerini

μ : genel ortalamayı

α_j : Faktörün j. düzeyinin bağımlı değişken üzerine etkisini ($\alpha_j = \mu_j - \mu$)

ε_{ij} : Hata terimini

ifade eder.

Sabit etki modelinde yokluk hipotezi faktör düzeylerinin bağımlı değişken üzerinde bir etkisi olmadığına işaret etmek üzere; faktör düzeylerine karşılık bağımlı değişkene ait ortalamalar arasında fark olmadığı şeklinde kurulur. Alternatif hipotez ise, en az bir faktör düzeyine karşılık gelen ortalama değer diğerlerinden farklı olduğu şeklindedir.

$$\begin{aligned} H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_J = \mu \\ H_1: \mu_j \text{ parametrelerinden en az biri farklıdır} \end{aligned} \quad (13.9)$$

13.4. ANOVA (Analysis of Variance) Tablosu ve F Testi

Burada yokluk hipotezinin F testi ile test edilebilmesi aşağıdaki varsayımlara bağlıdır.

- n_j hacimli örnekler bağımsızdır.
- n_j hacimli örneklerin seçimi rastgeledir.
- n_j hacimli örneklerin her biri normal dağılımdan gelmiştir.
- n_j hacimli örneklerin geldikleri yığınların varyansları aynıdır (Varyanslar homojendir.)

Tek faktörlü varyans analizinde yokluk hipotezinin test edilmesi kareler toplamalarının serbestlik derecelerine bölünerek ortalama karelerin hesaplanmasını gerektirir. Bu ortalama kareler ve karşılık gelen serbestlik dereceler aşağıdaki gibi verilmiştir.

- ✓ GAKO: Gruplar arası kareler ortalaması

$$GAKO = \frac{GAKT}{J - 1}, \quad J - 1: \text{Gruplar arası serbestlik derecesi}$$

- ✓ GIKO: Gruplar içi kareler ortalaması

$$GIKO = \frac{GIKT}{n - J}, \quad n - J: \text{Gruplar içi serbestlik derecesi}$$

- ✓ $n - 1$ ise Toplam kareler toplamına ait serbestlik derecesidir. Tıpkı kareler toplamalarının toplanabilir olma özelliği gibi, bu serbestlik derecelerinin de toplanabilir olma özelliği vardır. Yani;

$$n - 1 = (J - 1) + (n - J)$$

Varyans analizinde kareler toplamaları, serbestlik dereceleri, ortalama kareler aşağıdaki gibi bir tabloda gösterilmektedir. Bu tablo ANOVA tablosu olarak adlandırılır.

ANOVA TABLOSU

Değişim Kaynağı	Serbestlik Derecesi	Kareler Toplamları	Kareler Ortalaması	F
-----------------	---------------------	--------------------	--------------------	---

13: TEK YÖNLÜ VARYANS ANALİZİ

Gruplar Arası	$J - 1$	$GAKT$	$\frac{GAKO}{J - 1}$	$F = \frac{GAKO}{GIKO} \sim F_{J-1; n-J}$
Gruplar İçi (Hata)	$n - J$	$GIKT$	$\frac{GIKO}{(n - J)}$	
Toplam	$n - 1$	TKT		

Burada $GAKO/GIKO$ şeklinde tanımlanan F istatistiği F dağılıma sahiptir. Bunun nedeni:

$\frac{GAKO(J-1)}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(J-1)}$ ve $\frac{GIKO(n-J)}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-J)}$ olması ve iki ki-kare istatistiğinin kendi serbestlik derecelerine bölündükten sonra oranlanmaları ile bir F istatistiğinin elde edilebilmesidir. O halde ANOVA tablosundaki test istatistiği

$$F = \frac{\frac{GAKO(J-1)}{\sigma^2}}{\frac{GIKO(n-J)}{\sigma^2}} = \frac{GAKO}{GIKO} \sim F_{(J-1);(n-J)} \quad (13.10)$$

şeklinde elde edilir. O halde elde edilen hesap değeri kritik tablo değerinden büyükse ($F_h > F_{(J-1);(n-J);\alpha}$) yokluk hipotezi reddedilir.

Örnek 13.1: Daha önce verilen örneğe dayanarak, “Gübre türlerinin verim üzerindeki etkisi aynıdır.” şeklinde verilen yokluk hipotezini test ediniz.

Çözüm 13.1: Öncelikle hipotezler aşağıdaki gibi kurulur.

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu$$

$$H_1: \mu_j \text{ parametrelerinden en az biri farklıdır}$$

Daha önce kareler toplamaları hesaplanmıştı: $TKT = 450, GAKT = 228, GIKT = 222$

$J = 4, n = 24$ olmak üzere kareler ortalamaları da aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$GAKO = \frac{GAKT}{J - 1} = \frac{228}{4 - 1} = 76$$

$$GIKO = \frac{GIKT}{(n - J)} = \frac{222}{24 - 4} = 11.1$$

Bu değerleri kullanarak ANOVA tablosu aşağıdaki gibi oluşturulur.

ANOVA TABLOSU

Değişim Kaynağı	Serbestlik Derecesi	Kareler Toplamları	Kareler Ortalaması	F
Gruplar Arası	3	228	$GAKO = \frac{228}{3} = 76$	$F = \frac{GAKO}{GIKO} = \frac{76}{11.1} = 6.847$

HİPOTEZ TESTLERİ DERS NOTLARI

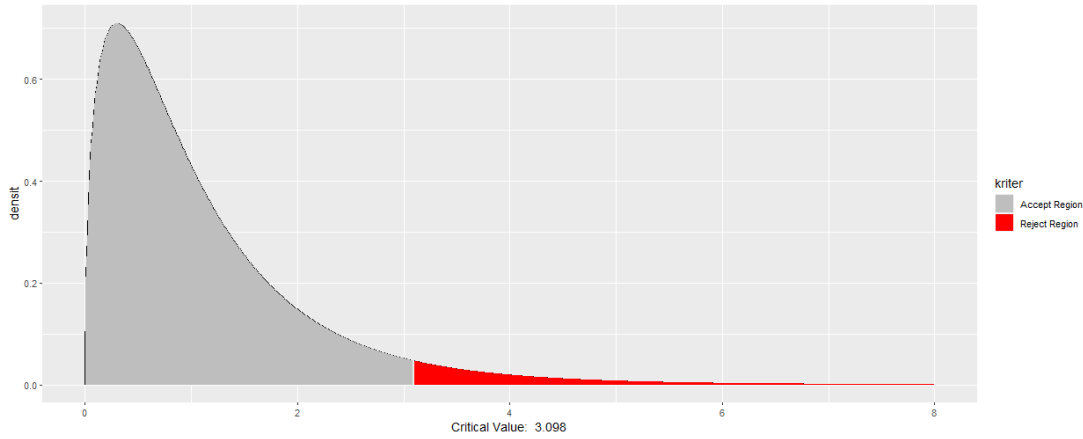
Gruplar İçi (Hata)	20	222	$G/KO = \frac{222}{20} = 11.1$
Toplam	23	450	

Buna göre kritik tablo değeri Ek-1’de verilen F tablosundan $F_{3;20;0.95} = 3.10$ olarak elde edilir. Bu kritik değer tablodan aşağıdaki gibi bulunur.

Tablo 16.4: F dağılımında 0.95 birikimli olasılıkları sağlayan kritik değerler tablosu ($\alpha = 0.05$)

	sd_1																			
sd_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	161.45	199.5	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54	241.88	242.98	243.91	244.69	245.36	245.95	246.46	246.92	247.32	247.69	248.01
2	18.51	19	19.16	19.25	19.3	19.33	19.35	19.37	19.38	19.4	19.4	19.41	19.42	19.42	19.43	19.43	19.44	19.44	19.44	19.45
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.76	8.74	8.73	8.71	8.7	8.69	8.68	8.67	8.67	8.66
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6	5.96	5.94	5.91	5.89	5.87	5.86	5.84	5.83	5.82	5.81	5.8
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.7	4.68	4.66	4.64	4.62	4.6	4.59	4.58	4.57	4.56
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.1	4.06	4.03	4	3.98	3.96	3.94	3.92	3.91	3.9	3.88	3.87
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.6	3.57	3.55	3.53	3.51	3.49	3.48	3.47	3.46	3.44
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.5	3.44	3.39	3.35	3.31	3.28	3.26	3.24	3.22	3.2	3.19	3.17	3.16	3.15
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.1	3.07	3.05	3.03	3.01	2.99	2.97	2.96	2.95	2.94
10	4.96	4.1	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.94	2.91	2.89	2.86	2.85	2.83	2.81	2.8	2.79	2.77
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.2	3.09	3.01	2.95	2.9	2.85	2.82	2.79	2.76	2.74	2.72	2.7	2.69	2.67	2.66	2.65
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3	2.91	2.85	2.8	2.75	2.72	2.69	2.66	2.64	2.62	2.6	2.58	2.57	2.56	2.54
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.63	2.6	2.58	2.55	2.53	2.51	2.5	2.48	2.47	2.46
14	4.6	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.7	2.65	2.6	2.57	2.53	2.51	2.48	2.46	2.44	2.43	2.41	2.4	2.39
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.9	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.51	2.48	2.45	2.42	2.4	2.38	2.37	2.35	2.34	2.33
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.46	2.42	2.4	2.37	2.35	2.33	2.32	2.3	2.29	2.28
17	4.45	3.59	3.2	2.96	2.81	2.7	2.61	2.55	2.49	2.45	2.41	2.38	2.35	2.33	2.31	2.29	2.27	2.26	2.24	2.23
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.37	2.34	2.31	2.29	2.27	2.25	2.23	2.22	2.2	2.19
19	4.38	3.52	3.13	2.9	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.34	2.31	2.28	2.26	2.23	2.21	2.2	2.18	2.17	2.16
20	4.35	3.49	3.1	2.87	2.71	2.6	2.51	2.45	2.39	2.35	2.31	2.28	2.25	2.22	2.2	2.18	2.17	2.15	2.14	2.12

Ayrıca bu kritik değer ve oluşturmuş olduğu ret bölgesi $F_{3;20}$ dağılımında aşağıdaki gibi görülebilir.



Buna göre $F_h > 3.1$ olduğundan %95 güvenle yokluk hipotezi reddedilir ve gübre türlerine göre dekar başına ortalama verimin değiştiği söylenir.